康寧學報 12：125－136（2010）

資產定價的計量分析: 以投資組合為分析工具

呂仁廣

摘　要

本文用投資組合的工具，探討資產定價模型的設定。首先，從代表性投資人的角度出發，利用動態規劃法，以求出符合投資人投資行為的資產定價方程式，進而使用隨機折現因子的表示方式，將資產定價方程式寫成實證模型，並再將 CRRA 效用函數代入，以一般動差法和 HJ 距離估計法，分別估計和檢定。我們使用的是美國 CRSP 資料庫中的美國股市和消費資料，實證結果顯示，美國投資人的時間偏好大，消費型態每期差異大，投資偏好為風險厭惡。我們並發現雖然 CRRA 模型的正交條件成立，但是風險中立模型的 HJ 距離較 CRRA 模型更小，顯示 CRRA 模型仍有改進的空間。

關鍵詞：一般動差法、HJ 距離

*　華夏技術學院 資管系助理教授
電子郵件：Lue@cc.hwh.edu.tw
收稿日期：2009.11.18　　修改日期：2010.03.10　　接受日期：2010.03.24

The Econometric Analysis of Asset Pricing with Portfolios

Ren-Guang Lue

Abstract

This paper investigates the specification of asset pricing from the viewpoint of portfolios. First, we solve the decision problem of the representative investor by dynamic programming, and derive the asset pricing equation. Then we use the stochastic discount factor to display the econometric model substituted by CRRA utility function. Using the method of moment and HJ distance to estimate American stock market, we find the investor has large time preference, consumes differently among periods, and being risk averter. Finally, although CRRA can pass the orthogonal condition, risk-neutral model performs better, which means CRRA model has room to progress.

Keywords: general method of moment, HJ distance

---

* Assistant Professor, Department of Information management, Hwa Hsia Institute of Technology.

壹、前言

由於人們在非耐久財消費上無法儲存，未來消費又不一定有著落，因此每一個人都必須對未來做預期和規劃，將今日消費不完或不夠消費的財富，以貨幣形式參與金融市場，因此有的人這一期有多餘的錢可以借人，有的人在這一期必須向人貸款以度日。這時，資產就是買賣雙方的標的物，它的內容各式各樣，包括證券、票券、外幣、銀行存款、房地產等，這些資產的共同特色就是它們在未來有一不確定性的賣出價格和利息收入。[1]資產定價理論目的，就是想去了解如何把這些資產的未來的現金流入，搭配投資者的風險偏好，折現成爲此資產今日應有的定價。若今日此資產爲低定價，則明日賣出此資產可得高報酬率，反之亦然。而在賣方眼中，買方的報酬率就是賣方的資金成本，是故資產定價實是財務管理和投資學的理論核心。

資產定價來自於對未來不確定現金統入的預期，我們若使用的是經濟學常用的理性預期，則資產定價將可用一代表性投資者的投資決策問題所得出，亦即動態規劃法所得出的 Euler equation 將是此代表性投資者的投資行爲綱要，財務學者更進一步發現，Euler equation 內將未來現金流量折現的因子，即隨機折現因子(stochastic discount factor)就是資產定價的核心(pricing kernel)。

近來，如何估計並檢定此隨機折現因子，以及如何估計並檢定 Euler equation，變成實證分析的關鍵。一般而言，有兩種方法可以使用，一是 Hansen (1982)所發展出來的一般動差法(generalized method of moment)；另一是 Hansen, Heaton and Luttmer (1995)以及 Hansen and Jagannathan (1997)所發展出來的 HJ 距離(HJ distance)估計法。兩種方法都各有其優缺點，一般動差法的參數估計較有效率，但模型檢定統計量無法做跨模型比較；HJ 距離估計法的參數估計較無效率，但模型檢定統計量可以做跨模型比較。本文接下來的安排爲，第 2 節利用動態規劃法推導出資產定價方程式，第 3 節說明如何利用資產定價方程式做實證估計，最後一節是結論。

---

[1] 擁有房地產的利息收入就是租金。

貳、模型設定

假設有一代表性投資者，他的效用函數可以用 u 來表示，而這個效用爲實質消費 c_t 的函數，[2]並符合邊際效用爲正且遞減的法則──如此設定，我們將可以得到數學上的內解(interior solution)。[3]現在，此代表性投資者所站的時點爲第 t 期，他一開始擁有的財富秉賦(wealth endowment)爲 $\mathrm{W_t}$ ，由於他對未來的所得和消費水準具有不確定性，所以每一期除了消費以外，他還要決定如何買賣資產以做爲儲蓄之用。此代表性投資者的決策可以用下列數學問題表示，

$$\begin{aligned} &\max_{S_{i,t+1}} \; E\left[\sum_{s=0}^{\infty}\beta^s u\left(c_{t+s}\right)\middle| I_t\right] \\ &\text{s.t. } \; \mathrm{W_t} + \sum_{i=0}^{n}\left(d_{i,t}+p_{i,t}\right)S_{i,t} = c_t + \sum_{i=0}^{n} p_{i,t}\cdot S_{i,t+1} \end{aligned} \tag{1}$$

其中 E 爲此代表性投資者進行向前看(forward looking)決策時所用的期望運算子(expectation operator)，而 I_t 爲此期望運算子在第 t 期所用到的資訊集合， $p_{i,t}$ 爲第 i 個資產在第 t 期的實質價格，$d_{i,t}$ 爲第 i 個資產在第 t 期的紅利，$S_{i,t}$ 爲此投資者對第 i 個資產在第 t 期所持有的單位或份額(shares)，在這裡我們假設有 n 個資產可供代表性投資者選擇。[4]由於(1)式是屬於間斷時間下的動態最適化問題，一般使用動態規劃(dynamic programming)方法來求解。已知問題的控制變數是 $S_{i,t+1}$ ，但還沒有看到狀態變數，所以我們定義此投資者在第 t 期所有的現金流入爲 b_t ，

$$b_t \equiv \mathrm{W_t} + \sum_{i=0}^{n}\left(d_{i,t}+p_{i,t}\right)S_{i,t} \text{ 。} \tag{2}$$

---

[2] 文中「實質」的意思，表示它沒有通貨膨脹的因子在變數裡面。
[3] 內解的假設可以讓模型得出此代表性投資者在消費上具有有限的跨期替代，模型的結論就會擁有更多的實用價值。
[4] n 爲整數。

然後，我們可以定義價值爲 b_t 函數 $V(b_t)$ 如下

$$V(b_t)=\max\left\{u(c_t)+\beta E_t V(b_{t+1})\right\} \text{。} \tag{3}$$

由於實質消費可以寫成 $c_t=b_t-\sum_{i=0}^{n} p_{i,t}\cdot S_{i,t+1}$，我們可以推導出動態規劃下的一階必要條件爲

$$u'(c_t)(-p_{i,t})+\beta E_t V'(b_{t+1})(d_{i,t+1}+p_{i,t+1})=0 \text{ ，} \tag{4}$$

以及動態規劃下的包絡條件爲

$$V'(b_t)=u'(c_t) \tag{5}$$

將(5)式往後推一期再與(4)式合併，可得如下的尤拉方程式(Euler equation)

$$u'(c_t)\,p_{i,t}=\beta E_t\left[u'(c_{t+1})\left(p_{i,t+1}+d_{i,t+1}\right)\right] \text{。} \tag{6}$$

移項後，可得到 $u'(c_t)=\beta E_t\left[u'(c_{t+1})\left(p_{i,t+1}+d_{i,t+1}\right)/p_{i,t}\right]$，若我們定義投資組合中第 i 個證券第 t 期的毛報酬率(gross return)爲 $R_{i,t}\equiv\left(p_{i,t}+d_{i,t}\right)/p_{i,t-1}$ ，且定義第 t 期的隨機折現因子爲 $m_t\equiv\beta u'(c_t)/u'(c_{t-1})$ ，則投資者的尤拉方程式可以寫成

$$1=E\left[R_{i,t+1}m_{t+1}\mid I_t\right],\quad i=1,2,\ldots,n \text{ ，} \tag{7}$$

(7)式就是本文的資產定價方程式。除此之外，由於我們探討的主角是投資組合，所以爲了分析方便，我們可以將代表性投資者所持有的所有資產放入向量 $\mathbf{R}_{t+1}$ 中，此時

$$\mathbf{1}=E\left[\mathbf{R}_{t+1}m_{t+1}\mid I_t\right] \tag{8}$$

其中 $\mathbf{1}$ 爲 $n\times 1$ 維度且以 1 爲值的向量。

效用函數的種類有很多種，我們這裡所使用的效用函數有兩種，一是固定相對風險規避(constant relative risk aversion, 以下簡稱 CRRA)的效用函數，效用函數形式爲$u(c_t)=[1/(1-\alpha)]c_t^{1-\alpha}$；另一個爲風險中立(risk-neutral)的效用函數，效用函數形式爲$u(c_t)=c_t$。値得一提的是，CRRA 的效用函數α的估計値，若爲正數，則代表性投資者爲風險厭惡者，若爲負數，則爲風險愛好者。此外，α的倒數$1/\alpha$爲跨期替代彈性，彈性值愈大，投資者在消費上的跨期替代程度愈大。

參、實證分析

我們主要估計的模型是 CRRA 模型，至於風險中立模型是用來與 CRRA 模型做 HJ 距離的比較。

一、資料來源

我們使用的樣本資料爲美國股價月資料，樣本期間爲 1960:1 至 1993:10。我們所研究的資產包含10種投資組合，取自於美國芝加哥大學的CRSP (Center for Research in Security Prices)資料庫。這些投資組合是以資產規模標準排序，即投資組合 1 爲紐約股票交易所前 10%的小企業，並依此排序，投資組合 10 爲紐約股票交易所最後 10%的大企業。至於無風險報酬率，我們用的是 3 個月期的美國國庫券月報酬率。實質消費變數使用的是美國個人非耐久財的消費和服務支出。

二、實證方法

(一) 一般動差法

使用一般動差法來估計有經濟上的意涵和好處，因爲自從 Muth (1960, 1961)認爲人們對未來的預期將會影響其行爲，而所有人的行爲就形成均衡，是故理性預期漸成爲經濟模型在探討人們行爲的重要設定。對於本文模型而言，現在的資產定價，將受到人們對於未來股利、未來股價以及未來消費水準的預測所影響。然而，未來的變數對投資者而言是看不到的，

$$\mathbf{1}=E\left[\mathbf{R}_{t+1}m_{t+1}\mid L_t\right] \tag{9}$$

其中 $L_t \subset I_t$ ，[5]也就是研究者的訊息集合僅是投資者訊息集合的子集，這也是模型出現誤差的原因之一。利用 sigma 代數的集合原理，只要找出可以建構出訊息集合 L_t 的工具變數向量 $\mathbf{z}_t$ ，利用理性預期定義，投資人不會出現系統性錯誤，則

$$\mathbf{0} = E\left[\left(\mathbf{R}_{t+1} m_{t+1} - \mathbf{1}\right) \otimes \mathbf{z}_t\right] \tag{10}$$

這裡的 $\otimes$ 表示克羅內克積(Kronecker product)。令 $\boldsymbol{\theta}$ 爲待估計的參數向量，即在 CRRA 模型時， $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta)'$ ；在風險中立模型時， $\boldsymbol{\theta} = \alpha$ 。

定義(10)式括號內的部分 $\mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}) \equiv \left(\mathbf{R}_{t+1} m_{t+1} - \mathbf{1}\right) \otimes \mathbf{z}_t$ ，則 $\mathbf{h}(\boldsymbol{\theta})$ 的樣本平均數可以定義成 $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) \equiv (1/T)\mathbf{h}(\boldsymbol{\theta})$ ，其中 T 爲樣本數。如此一來，一般動差法可以基於過度認定(over-identified)原理，求取下列目標函數 Q 的極小值

$$Q(\boldsymbol{\theta}) \equiv \left[\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})\right]' \mathbf{W} \left[\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})\right]。 \tag{11}$$

其中文獻上稱矩陣 $\mathbf{W}$ 爲權數矩陣(weighting matrix)。在求取 Q 的數值極小值時，通常由參數向量 $\boldsymbol{\theta}$ 的共變數矩陣之反矩陣，做爲權數矩陣的起始值。Hansen (1982)並提出此一般動差法下的模型檢定統計量，即 Hansen 統計量，它是樣本數乘以(11)式的最小 Q 值，Hansen (1982)並證明出 Hansen 統計量的極限分配爲卡方分配，我們可根據它的 p 值，檢定模型是否正交條件成立。此外，由於一般動差法在求取 Q 的數值極小時，權數矩陣可以不斷更新(update)，是故所得出的參數估計量會較有效率，但也因爲各模型最後收斂的權數矩陣會不同，是故 Hansen 檢定統計量無法做跨模型的比較。

(二) HJ 距離估計法

使用 HJ 距離來做爲統計推論的方法，首先，我們必須要認知到，資產定價模型真正的隨機折現因子往往是未知的，並且當金融市場是不完全市場(incomplete market)時，隨機折現因子在模型中的決定將不是唯一，是故我們可以將資產定價模型中，所有可能的真實的隨機折現因子 m 收集在一起，成爲集合 M。由於資產定價模型的推導，最後的 Euler equation 都可以用(8)式來

[5] 第(8)式和第(9)式的不同在於其使用的訊息集合。

表示，資產定價模型的關鍵就在於隨機折現因子的內容設定，是故我們對於資產定價模型是否設定錯誤，可以將焦點集中在模型的隨機折現因子距離真正的隨機折現因子有多遠。在以下的說明中，因為 HJ 距離的計算並不牽涉到投資人的時間決策，且其內容也未涉及時間序列的統計特性，所以在下面對 HJ 距離的說明中，我們將省略時間下標，將重點放在它的推導原理上。除此之外，為了避免與一般動差法的原理混淆，我們所用的變數代號將會有些與一般動差法不同，例如在以下的說明中，我們將把研究者所設定的資產定價模型之隨機折現因子標示為 y。

在 Hansen and Jagannathan (1997)一文中，作者指出若資產定價模型為真，則模型的隨機折現因子 $y \in M$ ，若資產定價模型有誤，則 $y \notin M$ 。由於資產定價模型一定與研究樣本的真實模型有所差距，所以 y 往往不在集合 M 中，只是我們想知道的是 y 距離任何一個最近的 M 的元素有多遠。是故我們可以定義 HJ 距離為

$$\delta = \min_{m \in M} \left\| y - m \right\| \tag{12}$$

此處的距離符號$\|\cdot\|$定義成$\|x\| = \sqrt{E\left(x^2\right)}$，因為距離符號的內涵為變數二階動差的開根號，所以當我們改寫成下列拉氏乘數問題時，需將目標函數平方，以及將拉氏乘數乘以 2，以使一階必要條件看起來比較乾淨好操作：

$$\delta^2 = \min_{m \in M} \sup_{\lambda \in R^n} \left\{ E\left(y - m\right)^2 + 2\boldsymbol{\lambda}'\left[E\left(\mathbf{R}m\right) - \mathbf{1}\right] \right\} 。 \tag{13}$$

令 m^* 和 $\boldsymbol{\lambda}^*$ 為上述問題的解，Hansen and Jagannathan (1997)從一階必要條件發現

$$y - m^* = \boldsymbol{\lambda}^{*\prime}\mathbf{R} ， \tag{14}$$

此處的 $\boldsymbol{\lambda}^* = E\left(\mathbf{R}\mathbf{R}'\right)^{-1} E\left(y\mathbf{R} - \mathbf{1}\right)$。因此，HJ 距離可以推導成

$$\delta = \left\| y - m^* \right\| = \left\| \boldsymbol{\lambda}^{*\prime}\mathbf{R} \right\| = \left[\boldsymbol{\lambda}^{*\prime} E\left(\mathbf{R}\mathbf{R}'\right) \boldsymbol{\lambda} \right]^{1/2} ， \tag{15}$$

再將$\boldsymbol{\lambda}^*$代入，可得

$$\delta = \left[E\left(y\mathbf{R}-\mathbf{1}\right)' E\left(\mathbf{RR}'\right)^{-1} E\left(y\mathbf{R}-\mathbf{1}\right) \right]^{1/2} 。 \tag{16}$$

是故，套用一般動差法的術語，此時母體的權數矩陣為$E\left(\mathbf{RR}'\right)^{-1}$，母體的定價誤差則為$g = E\left(y\mathbf{R}-\mathbf{1}\right)$。Hansen, Heaton and Luttmer (1995)並證明δ的極限分配為常態分配，以及δ^2的極限分配為卡方分配。HJ 距離估計法因為將權數矩陣固定成$E\left(\mathbf{RR}'\right)^{-1}$，是故在做$\|y-m\|$的距離極小時，所得出的參數估計會較無效率，但因為從第(12)式的靈感出發，故 HJ 距離的檢定統計量可以做跨模型比較。

(三) 實證結果

表一為利用一般動差法對 CRRA 模型做參數統計推論，從標準差可看出，兩個參數估計值的顯著水準都在 5%以上。β的估計值為 0.69，換算出來的時間偏好率高達 45%，[6]較一般美國定存利率來得高很多，是故美國人很喜歡在當日就消費。此外，α的估計值為正，且顯著，表示美國投資人的風險態度傾向規避；而α的倒數$1/\alpha$為跨期替代彈性，算出來只有 0.01，表示美國投資人的消費跨期替代很小，所對應出來的各期間的消費變異較大。

表一　一般動差法的 CRRA 模型參數統計推論結果

	α	β
估計值	91.41**	0.69***
標準差	(38.11)	(0.14)

註：一個星號 * 表示 10% 的顯著水準, 兩個星號** 表示 5%的顯著水準, 以及三個星號*** 表示 1%的顯著水準。

表二為 Hansen 檢定統計量的檢定結果，由於其無法做跨模型比較，其得出的 p 值只能說明，模型的正交條件，即第(10)式不會被拒絕。

[6] 時間偏好率等於(1/0.69)-1=0.45。

表二　一般動差法的 CRRA 模型檢定結果

	Hansen 檢定統計量
估計值	4.40
p 值	[0.88]

註：一個星號 * 表示 10% 的顯著水準, 兩個星號** 表示 5%的顯著水準, 以及三個星號*** 表示 1%的顯著水準。

我們進一步再利用 HJ 距離估計法來看 CRRA 模型，由表三可看出α的估計值不再顯著，得知權數矩陣固定確實造成參數估計值因較不效率，而可能出現不顯著的結果。

表三　HJ 距離估計法的 CRRA 模型參數統計推論結果

	α	β
估計值	62.64	0.80***
標準差	(54.34)	(0.19)

註：一個星號 * 表示 10% 的顯著水準, 兩個星號** 表示 5%的顯著水準, 以及三個星號*** 表示 1%的顯著水準。

最後，從表四得知 HJ 距離統計量數值爲 0.18，且不被拒絕，表示模型距離真實模型有段距離。

表四　HJ 距離估計法的 CRRA 模型檢定結果

	HJ 距離（δ）
估計值	0.18
p 值	[0.75]

註：一個星號 * 表示 10% 的顯著水準, 兩個星號** 表示 5%的顯著水準, 以及三個星號*** 表示 1%的顯著水準。

爲了做跨模型比較，我們又用 HJ 距離估計法分析風險中立模型，得出結果如表五。我們可以看出，風險中立模型和真實模型的距離只有 0.13，較 CRRA 模型來得更小，顯示 CRRA 模型還有改進的空間。

表五　HJ 距離估計法的風險中立模型檢定結果

	HJ 距離（δ）
估計值	0.13
p 值	[0.50]

註：一個星號 * 表示 10% 的顯著水準, 兩個星號** 表示 5%的顯著水準, 以及三個星號*** 表示 1%的顯著水準。

四、結論

本文從投資組合的角度，探討資產定價模型的設定。我們從代表性投資人的角度出發，利用動態規劃法，首先求出符合投資人的資產定價方程式，進而利用隨機折現因子的表示方式，將資產定價方程式寫成實證模型，再將 CRRA 效用函數代入，以一般動差法和 HJ 距離估計法，分別估計和檢定。

由於兩種估計方法都各有其優缺點，一般動差法的參數估計較有效率，但模型檢定統計量無法做跨模型比較；HJ 距離估計法的參數估計較無效率，但模型檢定統計量可以做跨模型比較。是故，對於參數估計值的解釋，我們傾向採取一般動差法所估計出的數值，做爲解釋投資人的投資態度和消費情形；對於跨模型的比較，我們則採取 HJ 距離的檢定統計量，並把 CRRA 模型和風險中立模型的 HJ 距離做比較，結果發現風險中立模型的 HJ 距離較小，顯示 CRRA 模型仍有改進的空間。

參考文獻

Hansen, L. P., (1982), Large Sample Properties of the Generalized Method of Moments Estimators, Econometrica, 50, 1029-1053.

Hansen, L. P. and J. Heaton and E. G. J. Luttmer, (1995), Econometric Evaluation of Asset Pricing Models, Review of Financial Studies, 8, 237-374.

Hansen, L. P. and R. Jagannathan, (1997), Assessing Specification Errors in Stochastic Discount Factor Models, Journal of Finance, 52, 557-590.

Muth, John F. (1960), "Optimal Properties of Exponentially Weighted Forecasts," Journal of the American Statistical Association, 55(2), pp. 299-306.

Muth, John F. (1961), "Rational Expectations and the Theory of Price Movement," Econometrica, 29(3), pp. 315-335.