四種函數的微分問題

余啓輝*

摘　要

本篇論文主要是研究四種函數的微分問題。我們利用二項級數和逐項微分定理可以求出這四種函數的任意階導函數，因此大大降低了求解它們高階微分值的困難度。另一方面，我們舉出四個函數實際的求出它們的任意階導函數以及一些它們的高階微分值，而這些高階微分值的答案都是以無窮級數的型式呈現的。同時，我們利用數學軟體 Maple 計算出這些高階微分值以及它們無窮級數表示法的近似值。

關鍵詞：微分、二項級數、逐項微分定理、Maple

*南榮技術學院　通識教育中心助理教授（通訊作者）
電子郵件：chiihuei@mail.njtc.edu.tw

收稿日期：2012.11.15　修改日期：2013.04.26　接受日期：2013.05.07

The Differential Problem of Four Types of Functions

Chii-Huei Yu*

Abstract

This paper mainly examines the differential problems of four types of functions. We can obtain any order derivatives of these four types of functions by using binomial series and differentiation term by term theorem, and hence reduce the difficulty of evaluating their higher order derivative values greatly. On the other hand, we propose four functions to determine their order derivatives and some of their higher order derivative values practically, and the answers of these higher order derivative values are presented in infinite series forms. Simultaneously, we employ the mathematical software Maple to calculate the approximations of these higher order derivative values and their infinite series forms.

Key Words: derivatives, binomial series, differentiation term by term theorem, Maple

* Assistant Professor, Center of General Education, Nan Jeon Institute of Technology (correspondence author)

壹、前言

在微積分課程裡，要求函數 $f(x)$ 在 $x=c$ 的 n 階微分值(n-th order derivative value) $f^{(n)}(c)$ (其中 n 爲正整數)，一般而言需要經過兩道手續。首先必須求出 $f(x)$ 的 n 階導函數 $f^{(n)}(x)$ ，其次再代入 $x=c$ 才能得到。這兩道手續在求高階微分值(即 n 比較大的情形)時會面臨計算越來越複雜的困境，所以要用手算的方式得到答案可以說是一件非常不容易的事情，有關函數微分問題的研究可以參考(高木貞治，1984，第二章；Edwards & Penney, 1986, chap. 3；Euler, 1997；Grossman, 1992, chap. 2；Larson, Hostetler & Edwards, 2006, chap. 2；Marshall, 2000)。面對這一個困難的問題，本篇文章研究四種函數的微分問題，這四種函數分別與餘弦函數、正弦函數、雙曲餘弦函數以及雙曲正弦函數有關連，它們分別是

$$f(x)=\frac{\cos(px+q)}{(a+be^{cx})^m} \tag{1}$$

$$g(x)=\frac{\sin(px+q)}{(a+be^{cx})^m} \tag{2}$$

$$w(x)=\frac{\cosh(px+q)}{(a+be^{cx})^m} \tag{3}$$

$$y(x)=\frac{\sinh(px+q)}{(a+be^{cx})^m} \tag{4}$$

其中 a,b,c,p,q 爲實數， $a,b\neq 0$ 且 m 爲任意正整數。我們利用二項級數和逐項微分定理可以求出這四種函數的任意階導函數，也就是本文四個主要的結果－定理 1, 2 , 3, 4，因此大大降低了求解這些函數高階微分值的困難度。另一方面，我們舉出四個函數實際的求出它們的任意階導函數以及計算它們的一些高階微分值，而這些高階微分值的答案都是以無窮級數的型式呈現的。同時，我們利用數學軟體 Maple 算出這些高階微分值以及它們無窮級數表示法的近似值。至於 Maple 在其他函數微分問題上的應用可以參考 (余啓輝，2012a -2012l)。

貳、主要的理論

首先我們介紹本文中用到的符號：

符號：(i)設複數 $z=a+ib$，其中 a,b 爲實數，$i=\sqrt{-1}$ 。我們將 z 的實部 a 記作 $\operatorname{Re}(z)$ 。

(ii)函數 $f(x)$ 的 n 階導函數記作 $f^{(n)}(x)$ ，其中 n 爲正整數。

(iii) 設 p 爲實數且 k 爲正整數，定義 $(p)_k=p(p-1)\cdots(p-k+1)$;而 $(p)_0=1$ 。

接著是本文用到的兩個公式：

尤拉公式 (Euler's formula)：

$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，其中 $i=\sqrt{-1}$，θ 爲任意實數。

棣美弗公式 (DeMoivre's formula)：

$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ ，其中 θ 爲任意實數， n 爲任意正整數。

以下介紹本文用到的兩個重要的定理：

二項級數 (Apostol, 1975, p244)：設 p,d 爲實數且 $|d|<1$ ，則 $(1+d)^p=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(p)_k}{k!}d^k$ 。

逐項微分定理 (Apostol, 1975, p230)：如果對所有非負整數 k，函數 $g_k:(a,b)\to R$ 滿足下列三個條件：(i)存在一點 $x_0\in(a,b)$ 使得 $\sum_{k=0}^{\infty}g_k(x_0)$ 收斂，(ii)所有函數 $g_k(x)$ 在開區間 (a,b) 都可以微分，(iii) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}g_k(x)$ 在 (a,b) 上均勻收斂(uniformly convergent)。則

$\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)$ 在開區間 (a,b) 上均勻收斂而且可以微分，其微分 $\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dx}g_k(x)$ 。

接著推導本文四個主要的結果，首先我們需要兩個引理：

引理 A:假設 r,p 爲實數， $p\neq 0$ 且 n 爲正整數，令 $\theta=\begin{cases}\cot^{-1}\frac{r}{p} & \text{如果} \quad p>0\\ \cot^{-1}\frac{r}{p}-\pi & \text{如果} \quad p<0\end{cases}$ ，

則 $(r+ip)^n=(r^2+p^2)^{n/2}e^{in\theta}$ (5)

證明: 因爲 $(r+ip)^n$

$$=\left(\sqrt{r^2+p^2}\right)^n\left(\frac{r}{\sqrt{r^2+p^2}}+i\frac{p}{\sqrt{r^2+p^2}}\right)^n$$

$$=(r^2+p^2)^{n/2}(\cos\theta+i\sin\theta)^n$$

$$=(r^2+p^2)^{n/2}(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

(利用棣美弗公式)

$$=(r^2+p^2)^{n/2}e^{in\theta}$$

(利用尤拉公式)

引理 B: 設 r,p,q 爲實數且 $p\neq 0$ ，n 爲任意正整數且函數 $u(x)=e^{rx}\cos(px+q)$ 的定義域爲 $(-\infty,\infty)$ 。則 $u(x)$ 的 n 階導函數

$$u^{(n)}(x)=(r^2+p^2)^{n/2}e^{rx}\cos(px+q+n\theta) \qquad (6)$$

對所有 $x\in(-\infty,\infty)$ 。其中

$$\theta=\begin{cases}\cot^{-1}\frac{r}{p} & \text{如果} \quad p>0\\ \cot^{-1}\frac{r}{p}-\pi & \text{如果} \quad p<0\end{cases} 。$$

證明: $u^{(n)}(x)$

$$=\frac{d^n}{dx^n}[e^{rx}\cos(px+q)]$$

$$=\frac{d^n}{dx^n}\mathrm{Re}[e^{(r+ip)x+iq}]$$

$$=\mathrm{Re}[(r+ip)^n\cdot e^{(r+ip)x+iq}]$$

$$=(r^2+p^2)^{n/2}e^{rx}\cdot\mathrm{Re}[e^{i(px+q+n\theta)}]$$

(利用引理 A)

$$=(r^2+p^2)^{n/2}e^{rx}\cos(px+q+n\theta)$$

以下是本文第一個主要的結果，我們求出與餘弦函數相關的函數 $f(x)=\frac{\cos(px+q)}{(a+be^{cx})^m}$ 任意階導函數的無窮級數表示法：

定理 1：假設 a,b,c,p,q 爲實數，$a,b\neq 0$ 且 m,n 爲任意正整數，設函數

$$f(x)=\frac{\cos(px+q)}{(a+be^{cx})^m}$$

的定義域爲 $\left\{x\in R \,\middle|\, e^{cx}\neq\left|\frac{a}{b}\right|\right\}$ 。

(i)若 $e^{cx}<\left|\frac{a}{b}\right|$ ，則 $f(x)$ 的 n 階導函數 $f^{(n)}(x)$

$$=\frac{1}{a^m}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-m)_k}{k!}\left(\frac{b}{a}\right)^k(c^2k^2+p^2)^{n/2}\times$$

$$e^{ckx}\cos(px+q+n\theta_k) \qquad (7)$$

其中 $\theta_k = \begin{cases} \cot^{-1}\dfrac{ck}{p} & \text{如果} \quad p>0 \\ \cot^{-1}\dfrac{ck}{p}-\pi & \text{如果} \quad p<0 \end{cases}$

(ii)若 $e^{cx} > \left|\dfrac{a}{b}\right|$，則

$f^{(n)}(x)$

$$= \frac{1}{b^m}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-m)_k}{k!}\left(\frac{a}{b}\right)^k[(ck+cm)^2+p^2]^{n/2}$$

$$\times e^{-(ck+cm)x}\cos(px+q+n\phi_k) \qquad (8)$$

其中 $\phi_k = \begin{cases} \cot^{-1}\dfrac{-(ck+cm)}{p} & \text{如果} \quad p>0 \\ \cot^{-1}\dfrac{-(ck+cm)}{p}-\pi & \text{如果} \quad p<0 \end{cases}$

證明：(i) 如果 $e^{cx} < \left|\dfrac{a}{b}\right|$，因爲

$$\frac{1}{(a+be^{cx})^m}$$

$$= \frac{1}{a^m}\cdot\frac{1}{\left(1+\dfrac{b}{a}e^{cx}\right)^m}$$

$$= \frac{1}{a^m}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-m)_k}{k!}\left(\frac{b}{a}e^{cx}\right)^k$$

(利用二項級數)

$$= \frac{1}{a^m}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-m)_k}{k!}\left(\frac{b}{a}\right)^k e^{ckx} \qquad (9)$$

所以 $f(x)$

$$= \frac{\cos(px+q)}{(a+be^{cx})^m}$$

$$= \frac{1}{a^m}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-m)_k}{k!}\left(\frac{b}{a}\right)^k e^{ckx}\cos(px+q)$$

(10)

利用逐項微分定理以及引理 B，我們得到 $f(x)$ 的 n 階導函數 $f^{(n)}(x)$

$$= \frac{1}{a^m}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-m)_k}{k!}\left(\frac{b}{a}\right)^k(c^2k^2+p^2)^{n/2}\times$$

$$e^{ckx}\cos(px+q+n\theta_k)$$

其中 $\theta_k = \begin{cases} \cot^{-1}\dfrac{ck}{p} & \text{如果} \quad p>0 \\ \cot^{-1}\dfrac{ck}{p}-\pi & \text{如果} \quad p<0 \end{cases}$。

(ii)若 $e^{cx} > \left|\dfrac{a}{b}\right|$，則

$$\frac{1}{(a+be^{cx})^m}$$

$$= \frac{1}{(be^{cx})^m}\cdot\frac{1}{\left(1+\dfrac{a}{b}e^{-cx}\right)^m}$$

$$= \frac{1}{b^m e^{cmx}}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-m)_k}{k!}\left(\frac{a}{b}e^{-cx}\right)^k$$

(利用二項級數)

$$= \frac{1}{b^m}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-m)_k}{k!}\left(\frac{a}{b}\right)^k e^{-(ck+cm)x}$$

(11)

所以 $f(x) = \dfrac{\cos(px+q)}{(a+be^{cx})^m}$

$$= \frac{1}{b^m}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-m)_k}{k!}\left(\frac{a}{b}\right)^k e^{-(ck+cm)x}\cos(px+q)$$

(12)

利用逐項微分定理以及引理 B，我們得到 $f(x)$ 的 n 階導函數 $f^{(n)}(x)$

$$=\frac{1}{b^m}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-m)_k}{k!}\left(\frac{a}{b}\right)^k[(ck+cm)^2+p^2]^{n/2}\times e^{-(ck+cm)x}\cos(px+q+n\phi_k)$$

其中

$$\phi_k=\begin{cases}\cot^{-1}\frac{-(ck+cm)}{p} & \text{如果 } p>0\\ \cot^{-1}\frac{-(ck+cm)}{p}-\pi & \text{如果 } p<0\end{cases}$$

以下是本文第二個主要的結果，我們求出與正弦函數相關的函數 $g(x)=\frac{\sin(px+q)}{(a+be^{cx})^m}$ 任意階導函數的無窮級數表示法：

定理 2：在與定理 1 相同的假設下且函數

$$g(x)=\frac{\sin(px+q)}{(a+be^{cx})^m}$$

的定義域爲 $\left\{x\in R\,\middle|\,e^{cx}\neq\left|\frac{a}{b}\right|\right\}$ 。

(i)若 $e^{cx}<\left|\frac{a}{b}\right|$ ，則 $g(x)$ 的 n 階導函數 $g^{(n)}(x)$

$$=\frac{1}{a^m}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-m)_k}{k!}\left(\frac{b}{a}\right)^k(c^2k^2+p^2)^{n/2}\times e^{ckx}\sin(px+q+n\theta_k) \qquad (13)$$

其中

$$\theta_k=\begin{cases}\cot^{-1}\frac{ck}{p} & \text{如果 } p>0\\ \cot^{-1}\frac{ck}{p}-\pi & \text{如果 } p<0\end{cases}$$ 。

(ii)若 $e^{cx}>\left|\frac{a}{b}\right|$ ，則 $g(x)$ 的 n 階導函數 $g^{(n)}(x)$

$$=\frac{1}{b^m}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-m)_k}{k!}\left(\frac{a}{b}\right)^k[(ck+cm)^2+p^2]^{n/2}\times e^{-(ck+cm)x}\sin(px+q+n\phi_k) \qquad (14)$$

其中

$$\phi_k=\begin{cases}\cot^{-1}\frac{-(ck+cm)}{p} & \text{如果 } p>0\\ \cot^{-1}\frac{-(ck+cm)}{p}-\pi & \text{如果 } p<0\end{cases}$$

證明：因爲

$$g(x)=\frac{\sin(px+q)}{(a+be^{cx})^m}=\frac{\cos\left(px+q-\frac{\pi}{2}\right)}{(a+be^{cx})^m}$$

所以由定理 1 可以得到本定理

接著是本文第三個主要的結果，我們求出與雙曲餘弦函數有關的函數 $w(x)=\frac{\cosh(px+q)}{(a+be^{cx})^m}$ 任意階導函數的無窮級數表示法：

定理 3：在與定理 1 相同的假設下且函數

$$w(x)=\frac{\cosh(px+q)}{(a+be^{cx})^m} \qquad (15)$$

的定義域爲 $\left\{x\in R\,\middle|\,e^{cx}\neq\left|\frac{a}{b}\right|\right\}$ 。

(i)如果 $e^{cx} < \left|\frac{a}{b}\right|$，則 $w(x)$ 的 n 階導函數

$$w^{(n)}(x)$$

$$= \frac{1}{2a^m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-m)_k}{k!} \left(\frac{b}{a}\right)^k [(ck+p)^n e^{(ck+p)x+q}$$

$$+ (ck - p)^n e^{(ck-p)x-q}] \qquad (16)$$

(ii)如果 $e^{cx} > \left|\frac{a}{b}\right|$，則

$$w^{(n)}(x) = \frac{1}{2b^m} \times$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-m)_k}{k!} \left(\frac{a}{b}\right)^k [(-ck-cm+p)^n e^{(-ck-cm+p)x+q}$$

$$+ (-ck-cm-p)^n e^{(-ck-cm-p)x-q}] \qquad (17)$$

證明：(i)如果 $e^{cx} < \left|\frac{a}{b}\right|$，由上面的(9)式我們得到 $w(x)$

$$= \frac{\cosh(px+q)}{(a+be^{cx})^m}$$

$$= \frac{1}{a^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-m)_k}{k!} \left(\frac{b}{a}\right)^k e^{ckx} \cosh(px+q)$$

$$= \frac{1}{2a^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-m)_k}{k!} \left(\frac{b}{a}\right)^k [e^{(ck+p)x+q} +$$

$$e^{(ck-p)x-q}] \qquad (18)$$

因此利用逐項微分定理，我們得到 $w(x)$ 的 n 階導函數 $w^{(n)}(x)$

$$= \frac{1}{2a^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-m)_k}{k!} \left(\frac{b}{a}\right)^k [(ck+p)^n e^{(ck+p)x+q}$$

$$+ (ck-p)^n e^{(ck-p)x-q}]$$ 。

(ii)若 $e^{cx} > \left|\frac{a}{b}\right|$，則由上面的(11)式得到

$$w(x)$$

$$= \frac{\cosh(px+q)}{(a+be^{cx})^m}$$

$$= \frac{1}{b^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-m)_k}{k!} \left(\frac{a}{b}\right)^k \times$$

$$e^{-(ck+cm)x} \cosh(px+q)$$

$$= \frac{1}{2b^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-m)_k}{k!} \left(\frac{a}{b}\right)^k \times$$

$$[e^{(-ck-cm+p)x+q} + e^{(-ck-cm-p)x-q}] \qquad (19)$$

利用逐項微分定理可以求出 $w(x)$ 的 n 階導函數

$$w^{(n)}(x)$$

$$= \frac{1}{2b^m} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-m)_k}{k!} \left(\frac{a}{b}\right)^k \times$$

$$[(-ck-cm+p)^n e^{(-ck-cm+p)x+q} +$$

$$(-ck-cm-p)^n e^{(-ck-cm-p)x-q}]$$

最後是本文第四個主要的結果，我們求出與雙曲正弦函數有關的函數 $y(x) = \frac{\sinh(px+q)}{(a+be^{cx})^m}$ 任意階導函數的無窮級數表示法，和定理 3 相同的證明方式我們可以得到以下的結果：

定理 4：在與定理 1 相同的假設下且函數

$$y(x) = \frac{\sinh(px+q)}{(a+be^{cx})^m}$$

的定義域爲 $\left\{ x \in R \middle| e^{cx} \neq \left|\frac{a}{b}\right| \right\}$。

(i)如果 $e^{cx} < \left|\frac{a}{b}\right|$，則 $y(x)$ 的 n 階導函數

$$y^{(n)}(x) = \frac{1}{2a^m} \times$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-m)_k}{k!} \left(\frac{b}{a}\right)^k [(ck+p)^n e^{(ck+p)x+q}$$

$$-(ck-p)^n e^{(ck-p)x-q}] \qquad (20)$$

(ii)如果 $e^{cx} > \left|\frac{a}{b}\right|$，則

$$y^{(n)}(x) = \frac{1}{2b^m} \times$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-m)_k}{k!} \left(\frac{a}{b}\right)^k [(-ck-cm+p)^n e^{(-ck-cm+p)x+q}$$

$$-(-ck-cm-p)^n e^{(-ck-cm-p)x-q}] \qquad (21)$$

參、例子說明

以下針對本文所探討的四種函數的微分問題，舉出四個例子實際的利用定理 1, 2, 3, 4 來求這些函數的任意階導函數以及它們的一些高階微分值，而這些高階微分值的答案都是以無窮級數的型式呈現的。同時我們利用數學軟體 Maple 計算出這些高階微分值以及它們無窮級數表示法的近似值。

例題 1：設函數

$$f(x) = \frac{\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)}{(3+4e^{2x})^5} \qquad (22)$$

的定義域爲 $\left\{ x \in R \middle| e^{2x} \neq \frac{3}{4} \right\}$。

(i)若 $e^{2x} < \frac{3}{4}$，即 $x < \frac{1}{2}\ln\frac{3}{4} \cong -0.1438$，則由定理 1 之(i)可以得到 $f(x)$ 的任意 n 階導函數

$$f^{(n)}(x)$$

$$= \frac{1}{243} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-5)_k}{k!} \left(\frac{4}{3}\right)^k (4k^2+49)^{n/2} \times$$

$$e^{2kx} \cos\left(7x - \frac{\pi}{4} + n \cdot \cot^{-1}\frac{2k}{7}\right) \qquad (23)$$

所以我們可以求出 $f(x)$ 在 $x = -\frac{\pi}{4}$ 的 6 階微分值

$$f^{(6)}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{243} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-5)_k}{k!} \left(\frac{4}{3}\right)^k (4k^2+49)^3 \times$$

$$e^{-k\pi/2} \cos\left(6 \cdot \cot^{-1}\frac{2k}{7}\right) \qquad (24)$$

以下是利用 Maple 算出 $f^{(6)}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ 及其無窮級數表示法的近似值，並且我們估計兩者的誤差上界：

$f^{(6)}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$	-80.46869868
無窮級數表示法	-80.4686986128
誤差上界	6.72×10^{-8}

(ii)如果 $e^{2x} > \frac{3}{4}$，也就是 $x > \frac{1}{2}\ln\frac{3}{4} \cong -0.1438$，則由定理 1 之(ii)可以得到 $f(x)$ 的任意 n 階導函數

$$f^{(n)}(x)$$

$$=\frac{1}{1024}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-5)_k}{k!}\left(\frac{3}{4}\right)^k[(2k+10)^2+49]^{n/2}\times$$
$$e^{-(2k+10)x}\cos\left[7x-\frac{\pi}{4}+n\cdot\cot^{-1}\left(\frac{-2k-10}{7}\right)\right] \tag{25}$$

所以 $f(x)$ 在 $x=\frac{3\pi}{4}$ 的 12 階微分值

$$f^{(12)}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{1024}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-5)_k}{k!}\left(\frac{3}{4}\right)^k\times$$
$$[(2k+10)^2+49]^6\cdot e^{\frac{-(3k+15)\pi}{2}}\times$$
$$\cos\left[5\pi+12\cdot\cot^{-1}\left(\frac{-2k-10}{7}\right)\right] \tag{26}$$

同樣我們利用Maple計算 $f^{(12)}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ 及其無窮級數表示法的近似值，並且估計兩者的誤差上界：

$f^{(12)}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$	-0.220369221075
無窮級數表示法	-0.22036922107687
誤差上界	1.87×10^{-12}

附註 1: 因爲要利用二項級數，所以例題 1 中 $f(x)$ 的定義域必須是 $\left\{x\in R\middle|e^{2x}\neq\frac{3}{4}\right\}$，才能分成 $e^{2x}<\frac{3}{4}$ 和 $e^{2x}>\frac{3}{4}$ 這兩種情形來討論。並且當 $e^{2x}=\frac{3}{4}$，即 $x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{4}\right)$ 時，無法用我們的方法求 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{4}\right)$ 的任意階微分值，所以是一個值得我們繼續研究的問題。

例題 2：設函數

$$g(x)=\frac{\sin\left(4x+\frac{5\pi}{6}\right)}{(11-2e^{-3x})^4} \tag{27}$$

的定義域爲 $\left\{x\in R\middle|e^{-3x}\neq\frac{11}{2}\right\}$。

(i)如果 $e^{-3x}<\frac{11}{2}$，即

$x>-\frac{1}{3}\ln\frac{11}{2}\cong-0.5682$，

則由定理 2 之(i)我們得到 $g(x)$ 的任意 n 階導函數

$$g^{(n)}(x)$$
$$=\frac{1}{14641}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-4)_k}{k!}\left(-\frac{2}{11}\right)^k(9k^2+16)^{n/2}\times$$
$$e^{-3kx}\cdot\sin\left[4x+\frac{5\pi}{6}+n\cdot\cot^{-1}\left(-\frac{3k}{4}\right)\right] \tag{28}$$

所以 $g(x)$ 在 $x=-\frac{\pi}{6}$ 的 13 階微分值

$$g^{(13)}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=\frac{1}{14641}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-4)_k}{k!}\left(-\frac{2}{11}\right)^k(9k^2+16)^{13/2}\times$$
$$e^{k\pi/2}\cdot\sin\left[\frac{\pi}{6}+13\cdot\cot^{-1}\left(-\frac{3k}{4}\right)\right] \tag{29}$$

同樣我們利用 Maple 算出 $g^{(13)}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ 及其無窮級數表示法的近似值，並且估計兩者的誤差上界：

$g^{(13)}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$	$-1.023649088\cdot10^{29}$
無窮級數表示法	$-1.023649058\cdot10^{29}$
誤差上界	3×10^{21}

(ii)如果 $e^{-3x} > \frac{11}{2}$ ，也就是 $x < -\frac{1}{3}\ln\frac{11}{2}$ $\cong -0.5682$，則由定理 2 之(ii)可以求出 $g(x)$ 的任意 n 階導函數

$$g^{(n)}(x)$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4)_k}{k!} \left(-\frac{11}{2}\right)^k [(3k+12)^2+16]^{n/2} \times e^{(3k+12)x} \sin\left[4x + \frac{5\pi}{6} + n \cdot \cot^{-1}\left(\frac{3k+12}{4}\right)\right] \tag{30}$$

因此 $g(x)$ 在 $x = -\frac{7\pi}{6}$ 的 15 階微分值

$$g^{(15)}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4)_k}{k!} \left(-\frac{11}{2}\right)^k [(3k+12)^2+16]^{15/2} \times e^{-\frac{(7k+28)\pi}{2}} \sin\left[\frac{\pi}{6} + 15 \cdot \cot^{-1}\left(\frac{3k+12}{4}\right)\right] \tag{31}$$

以下利用 Maple 算出 $g^{(15)}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$ 及其無窮級數表示法的近似值，並且估計兩者的誤差上界如下表：

$g^{(15)}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$	-0.000136
無窮級數表示法	-0.0001363580102
誤差上界	3.58×10^{-7}

例題 3：設函數

$$w(x) = \frac{\cosh(3x-2)}{(5+6e^{4x})^7} \tag{32}$$

的定義域為 $\left\{x \in R \middle| e^{4x} \neq \frac{5}{6}\right\}$ 。

(i)如果 $e^{4x} < \frac{5}{6}$ ，即 $x < \frac{1}{4}\ln\frac{5}{6} \cong -0.0456$ ，則由定理 3 之(i)得到 $w(x)$ 的任意 n 階導函數

$$w^{(n)}(x) = \frac{1}{156250} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-7)_k}{k!} \left(\frac{6}{5}\right)^k \times [(4k+3)^n \cdot e^{(4k+3)x-2} + (4k-3)^n \cdot e^{(4k-3)x+2}] \tag{33}$$

因此可以得到 $w(x)$ 在 $x = -1$ 的 11 階微分值

$$w^{(11)}(-1)$$

$$= \frac{1}{156250} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-7)_k}{k!} \left(\frac{6}{5}\right)^k \times [(4k+3)^{11} \cdot e^{-4k-5} + (4k-3)^{11} \cdot e^{-4k+5}] \tag{34}$$

由 Maple 算出 $w^{(11)}(-1)$ 及其無窮級數表示法的近似值，並且估計兩者的誤差上界：

$w^{(11)}(-1)$	6815.862522
無窮級數表示法	6815.879795
誤差上界	0.0172

(ii)如果 $e^{4x} > \frac{5}{6}$ ，即 $x > \frac{1}{4}\ln\frac{5}{6} \cong -0.0456$ ，則由定理 3 之(ii)得到 $w(x)$ 的任意 n 階導函數

$$w^{(n)}(x)$$

$$= \frac{1}{559872} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-7)_k}{k!} \left(\frac{5}{6}\right)^k [(-4k-25)^n \times$$

$$e^{(-4k-25)x-2} + (-4k-31)^n \cdot e^{(-4k-31)x+2}] \tag{35}$$

因此我們可以求出 $w(x)$ 在 $x = \frac{1}{4}$ 的 10 階微分值

$$w^{(10)}\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{559872} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-7)_k}{k!} \left(\frac{5}{6}\right)^k [(-4k-25)^{10} \times$$

$$e^{\frac{-4k-33}{4}} + (-4k-31)^{10} \cdot e^{\frac{-4k-23}{4}}] \tag{36}$$

同樣我們可以利用 Maple 算出 $w^{(10)}\left(\frac{1}{4}\right)$ 和它的無窮級數表示法的近似值，並且估計兩者的誤差上界如下表：

$w^{(10)}\left(\frac{1}{4}\right)$	-1375.610
無窮級數表示法	-1375.619275
誤差上界	0.0092

例題 4：設函數

$$y(x) = \frac{\sinh(4x+6)}{(2-9e^{-3x})^4} \tag{37}$$

的定義域爲 $\left\{x \in R \middle| e^{-3x} \neq \frac{2}{9}\right\}$ 。

(i)如果 $e^{-3x} < \frac{2}{9}$ ，即

$x > -\frac{1}{3}\ln\frac{2}{9} \cong 0.50136$，則由定理 4 之(i)得到 $y(x)$ 的任意 n 階導函數

$$y^{(n)}(x)$$

$$= \frac{1}{32} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4)_k}{k!} \left(-\frac{9}{2}\right)^k [(-3k+4)^n \times$$

$$e^{(-3k+4)x+6} - (-3k-4)^n \times e^{(-3k-4)x-6}] \tag{38}$$

因此 $y(x)$ 在 $x = 2$ 的 13 階微分值

$$y^{(13)}(2)$$

$$= \frac{1}{32} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4)_k}{k!} \left(-\frac{9}{2}\right)^k [(-3k+4)^{13} \times$$

$$e^{-6k+14} - (-3k-4)^{13} \times e^{-6k-14}] \tag{39}$$

由 Maple 算出 $y^{(13)}(2)$ 及其無窮級數表示法的近似值，並且估計兩者的誤差上界：

$y^{(13)}(2)$	$2.49111098 \cdot 10^{12}$
無窮級數表示法	$2.4910838 \cdot 10^{12}$
誤差上界	2.71×10^{8}

(ii)如果 $e^{-3x} > \frac{2}{9}$ ，即 $x < -\frac{1}{3}\ln\frac{2}{9} \cong 0.50136$ ，由定理4之(ii)得到 $y(x)$ 任意 n 階導函數

$$y^{(n)}(x)$$

$$= \frac{1}{13122} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4)_k}{k!} \left(-\frac{2}{9}\right)^k [(3k+16)^n \times$$

$$e^{(3k+16)x+6} - (3k+8)^n \times e^{(3k+8)x-6}] \tag{40}$$

所以可以得到 $y(x)$ 在 $x=-2$ 的 9 階微分值

$$y^{(9)}(-2)$$

$$=\frac{1}{13122}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-4)_k}{k!}\left(-\frac{2}{9}\right)^k[(3k+16)^9\times$$

$$e^{-6k-26}-(3k+8)^9\times e^{-6k-22}] \qquad (41)$$

利用 Maple 算出 $y^{(9)}(-2)$ 和它的無窮級數表示法的近似值，並且估計兩者的誤差上界如下表：

$y^{(9)}(-2)$	0.00002406942723
無窮級數表示法	0.000024069408695
誤差上界	1.85×10^{-11}

附註 2: 例題 1 到例題 4 中，這四個函數的高階微分值，事實上都可以利用 Maple 算出精確值，但是寫出來的答案非常冗長，有興趣的讀者可以自己用 Maple 做做看。

肆、結論

由上面四個例子可以知道定理1, 2, 3, 4是解決本文所研究的四種函數微分問題的主要理論依據，並且我們看到二項級數和逐項微分定理在我們理論推導中佔有舉足輕重的地位。事實上這兩個定理的應用極爲廣泛，許多困難的問題利用它們都可以迎刃而解，我們會陸續發表關於這方面的論文。另一方面，我們看到Maple在輔助解題上扮演著重要的角色，我們甚至可以利用Maple來設計一些函數的微分問題，並且試著從中找到解決問題的關鍵。未來我們會繼續將觸角延伸到其他微積分和工程數學的問題上，並且利用Maple作爲輔助工具來解決這些問題。

致謝

感謝審稿委員寶貴的意見和建議，我們已經盡最大的努力來修正。至於主要定理的證明依照論文寫作的習慣，不宜放在附錄中，這是本人的淺見。

參考文獻

中文部份

余啓輝 (2012 年 3 月)。Maple 的應用—以一些周期函數的微分問題爲例子。**IETAC 2012 第五屆資訊教育與科技應用研討會**，D3，11-16，台中市：中台科技大學。

余啓輝 (2012 年 3 月)。Maple 的應用－以正弦和餘弦函數的微分問題爲例子。**屏東台東澎湖地區大專校院第五屆通識教育聯合學術通識課程發展學術研討會**，197-207，屏東縣：永達技術學院。

余啓輝 (2012 年 5 月)。Maple 在求函數高階微分值問題上的應用。**ICIM2012 第 23 屆國際資訊管理學術研討會**，MS0287，高雄市：國立高雄大學。

余啓輝 (2012 年 6 月)。Maple 在兩種函數的高階微分值求解問題上的應用。**DTIM2012 數位科技與創新管理研討會**，A46，新北市：華梵大學。

余啓輝 (2012 年 6 月)。Maple 在微分問題上的應用。**2012 第六屆創新管理學術與實務研討會**，桃園縣：萬能科技大學。

余啓輝 (2012 年 6 月)。Maple 在雙曲函數微分問題上的應用。**ICSSMET 2012 安全管理與工程技術國際研討會**，481-484，嘉義縣：吳鳳科技大學。

余啓輝 (2012 年 6 月)。Maple 的應用－以三角函數的高階微分值求解問題爲例子。**ICSSMET2012 安全管理工程技術國際研討會**，469-473，嘉義縣：吳鳳科技大學。

余啓輝 (2012年8月)。Maple的應用－以兩種特別函數的微分問題爲例子。**MC2012 第十七屆行動計算研討會**，ID17，新北市：長庚大學。

余啓輝 (2012年8月)。Maple的應用－以求解某種類型有理函數的高階微分值爲例子。**DLT2012 數位生活科技研討會**，150-153，雲林縣：國立雲林科技大學。

余啓輝 (2012年9月)。傅利葉級數在三角函數微分問題上的應用。**遠東學報，29(3)**，271-280。

余啓輝 (2012年10月)。Maple的應用—以有理函數的微分問題爲例子。**2012光電與通訊工程研討會**，271-274，高雄市：國立高雄應用科技大學。

余啓輝 (2012年11月)。Maple的應用－以兩種函數的導函數閉合型式解求法爲例子。**WCE 2012 民生電子研討會**，P0082，雲林縣：國立虎尾科技大學。

葉能哲、賴漢卿 (譯) (1984)。**高等微積分(解析概論)** (原作者：高木貞治)。臺北市：文笙書局。

英文部份

Apostol, T. M. (1975). *Mathematical analysis* (2nd ed.). Massachusetts：Addison-Wesley Publishing Co., Inc.

Azarian, M. K. (1993). There may be more than one way to find the derivative of a function. *Missouri Journal of Mathematical Sciences*, *5*(1), 13-15.

Edwards, C. H. Jr. , & Penney, D. E. (1986). *Calculus and analytic geometry* (2nd ed.). New Jersey：Prentice-Hall, Inc.

Euler, R. (1997). A note on Taylor's series for sin(ax+b) and cos(ax+b). *The College Mathematics Journal*, *28*(4), 297-298.

Grossman, S. I. (1992). *Calculus* (5th ed.). London：Saunders College Publishing.

Larson, R., Hostetler, R. P. & Edwards, B. H. (2006). *Calculus with analytic geometry* (8th ed.). Boston：Houghton Mifflin.

Marshall, A. (2000). Math bite: once in a while, differentiation is multiplicative. *Mathematics Magazine*, 302.